

Лабораторная работа №1. Преобразования Фурье.

Дискретное преобразование Фурье (Discrete Fourier Transform) используется в алгоритмах цифровой обработки сигналов для сжатия данных (сжатие звука в MP3, сжатие изображений в JPEG) и анализе сигналов (фильтрация шумов, извлечение признаков). Данное преобразование принимает на вход дискретную функцию. Значит, для применения к непрерывным функциям (например, аналоговому сигналу), необходимо проводить дискретизацию - выборка конечного кол-ва значений из непрерывной функции.

В данной лабораторной работе мы рассмотрим следующие алгоритмы преобразования Фурье:

1. прямое преобразование Фурье
2. обратное преобразование Фурье
3. быстрое преобразование Фурье

Прямое преобразование Фурье:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}kn}, k = 0, \dots, N-1.$$

Обратное преобразование Фурье:

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{\frac{2\pi i}{N}kn}, k = 0, \dots, N-1.$$

N - количество значений дискретного сигнала

$x_n, n = 0, \dots, N-1$ - измеренные значения сигнала (в точках дискретизации с номерами $n = 0, \dots, N-1$)

$X_k, k = 0, \dots, N-1$ - N комплексных амплитуд синусоидальных сигналов, из суммы которых получаем исходных сигнал

Быстрое преобразование Фурье:

1. пусть N некоторая степень 2-ки
2. $x_{1,n} = x_{2n}; x_{2,n} = x_{2n+1}, n = 0, \dots, N/2-1$
3. $W_N^{nk} = e^{\pm \frac{2\pi i}{N}kn}$ - поворотный множитель
4. $X_k = X_{1,k} + W_N^k X_{2,k}$, где $X_{1,k}$ и $X_{2,k}$ есть $N/2$ точечные дискретные преобразования Фурье последовательностей $x_{1,n}$ и $x_{2,n}$ соответственно

Задание:

1. Сгенерировать сигнал заданный формулой
2. Написать функцию прямого преобразования Фурье
3. Написать функцию обратного преобразования Фурье
4. Написать функцию быстрого преобразования Фурье*
5. Применить преобразования к сигналу
6. Сравнить результаты работы функций с `scipy.fft` и `scipy.ifft`

Варианты:

1. $X(t) = \cos(2\pi t/12 + 1) + \sin(\pi t/24 + \pi/2), t = 0, 0.09, \dots < 270$
2. $X(t) = \cos(2\pi t/8 + 2) + \cos(\pi t/40 + \pi/2), t = 0, 0.07, \dots < 350$
3. $X(t) = \cos(2\pi t/6 + 1) + \sin(\pi t/40 + 3\pi/2), t = 0, 0.05, \dots < 300$
4. $X(t) = \sin(2\pi t/8 + 3) + \sin(\pi t/400 + \pi/2), t = 0, 0.09, \dots < 270$
5. $X(t) = \cos(2\pi t/10 + 1) + \cos(\pi t/30 + \pi/2), t = 0, 0.07, \dots < 280$
6. $X(t) = \cos(2\pi t/12 + 2) + \cos(\pi t/60), t = 0, 0.09, \dots < 360$
7. $X(t) = \cos(2\pi t/4 + 1) + \sin(\pi t/12 + \pi/2), t = 0, 0.09, \dots < 270$
8. $X(t) = \sin(2\pi t/12 + 1) + \sin(\pi t/90 + \pi/2), t = 0, 0.07, \dots < 210$